

#### 4.4. Оценка адекватности моделирования

Оценка адекватности динамической адаптивной модели электропотребления техноценоза [19,20] включает две основные процедуры. Первая заключается в оценке ошибок (погрешностей) прогнозирования, т.е. собственно проверке качества процесса прогнозирования. Вторая процедура предполагает анализ остатков прогнозирования на наличие полезной информации и неучтенных моделью закономерностей [23,52].

Замысел оценки адекватности заключается в следующем. Из имеющихся данных по электропотреблению объектов техноценоза последние пять лет резервируются в качестве матрицы верификации, а по оставшимся данным осуществляется перспективный прогноз на глубину матрицы верификации. Затем полученные прогнозные значения электропотребления техноценоза сравниваются с соответствующими эмпирическими данными с использованием двух процедур оценки адекватности. Отрицательный вывод по первой процедуре свидетельствует либо о существенных недостатках в методологии, применяемой в модели, либо о неправильной оценке ее прогностических возможностей. Вторая процедура служит индикатором полноты и корректности алгоритма модели [3,4].

Абсолютная ошибка прогнозирования вычисляется по формуле [65]:

$$\varepsilon = X - X_p, \quad (4.47)$$

где  $\varepsilon$  – вектор ошибок прогнозирования;  
 $X$  – вектор эмпирических данных;  
 $X_p$  – вектор прогнозных оценок.

Определение погрешностей осуществляется для всех исследуемых лет матрицы верификации, причем в качестве эмпирических значений электропотребления объектов техноценоза для расчетов берутся истинные значения, соответствующие году прогнозирования.

Суммарная абсолютная ошибка определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|, \quad (4.48)$$

где  $n$  – количество объектов техноценоза.

Абсолютная ошибка для техноценоза в целом:

$$E = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n X_{p_i} \right|. \quad (4.49)$$

Численные значения абсолютных ошибок прогнозирования для примера из параграфа 4.3 [19,20] приведены в таблице 4.1 и на рисунке 4.24.

Таблица 4.1

## ЗНАЧЕНИЯ АБСОЛЮТНЫХ ОШИБОК ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Год	Максимальная абсолютная ошибка, кВт·ч	Суммарная абсолютная ошибка, кВт·ч	Абсолютная ошибка для техноценоза, кВт·ч
+1	$1,863 \cdot 10^4$	$3,294 \cdot 10^5$	$1,017 \cdot 10^5$
+2	$4,687 \cdot 10^4$	$4,421 \cdot 10^5$	$1,589 \cdot 10^5$
+3	$4,226 \cdot 10^4$	$5,316 \cdot 10^5$	$2,16 \cdot 10^5$
+4	$1,865 \cdot 10^4$	$5,094 \cdot 10^5$	$3,44 \cdot 10^5$
+5	$8,545 \cdot 10^4$	$7,438 \cdot 10^5$	$3,851 \cdot 10^5$

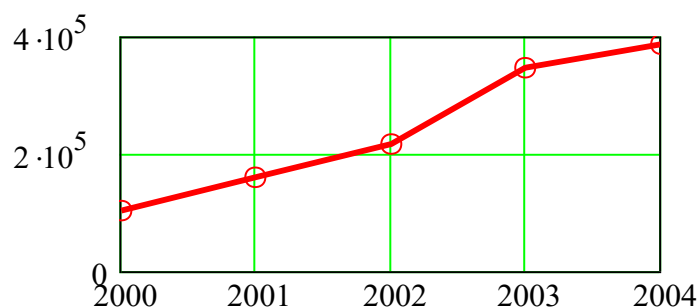


Рис. 4.24. Динамика изменения абсолютной ошибки прогнозирования для техноценоза [19,20]: абсцисса – исследуемые годы; ордината – электропотребление, кВт·ч

Мерой рассеяния прогнозных значений служит коэффициент вариации [23,52]. Для его расчета сначала определяется выборочное среднее квадратическое отклонение абсолютной ошибки прогнозирования:

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_B)^2}{n}}, \quad (4.50)$$

где  $n$  – объем выборки;

$\bar{\varepsilon}_B$  – выборочное среднее абсолютной ошибки прогнозирования.

Коэффициент вариации определяется по формуле:

$$K = \frac{\sigma_{\varepsilon}}{\bar{X}_B}, \quad (4.51)$$

где  $\sigma_{\varepsilon}$  – выборочное среднее квадратическое отклонение абсолютной ошибки прогнозирования;  
 $\bar{X}_B$  – выборочное среднее реальных данных.

Численные значения коэффициента вариации, рассчитанные на годы прогноза для примера из параграфа 4.3 [20], находятся в пределах 2 – 6 %. Ошибки прогнозирования определяются по следующим формулам.

Относительная ошибка прогнозирования для объектов техноценоза:

$$\varepsilon_{\text{ОТН}} = \varepsilon \cdot X^{-1}. \quad (4.52)$$

Суммарная относительная ошибка прогнозирования (рис. 4.25):

$$\varepsilon_{\Sigma\text{ОТН}} = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_{\text{ОТН}_i}|. \quad (4.53)$$

Средняя относительная ошибка (рис. 4.26):

$$\varepsilon_{\text{СР\_ОТН}} = \frac{\varepsilon_{\Sigma\text{ОТН}}}{n} \cdot 100 \%. \quad (4.54)$$

Относительная ошибка для техноценоза в целом (рис. 4.27):

$$\text{ОЕ} = \frac{E}{\sum_{i=1}^n X_i} \cdot 100 \%. \quad (4.55)$$

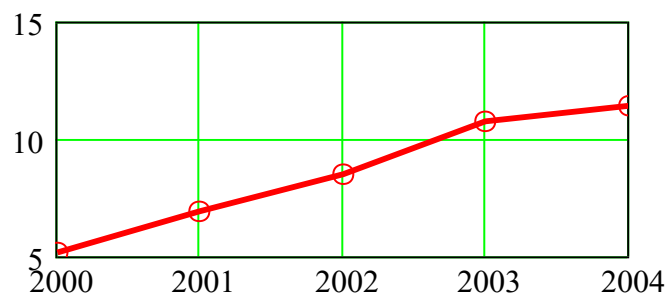


Рис. 4.25. Динамика изменения суммарной относительной ошибки прогнозирования (см. п. 4.3):  
 абсцисса – исследуемые годы;  
 ордината – относительные единицы

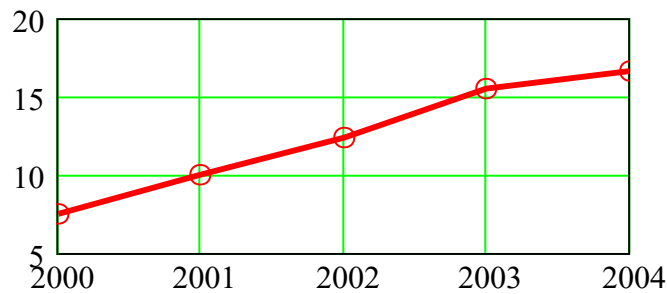


Рис. 4.26. Динамика изменения средней относительной ошибки прогнозирования (см. п. 4.3):  
абсцисса – исследуемые годы;  
ордината – проценты

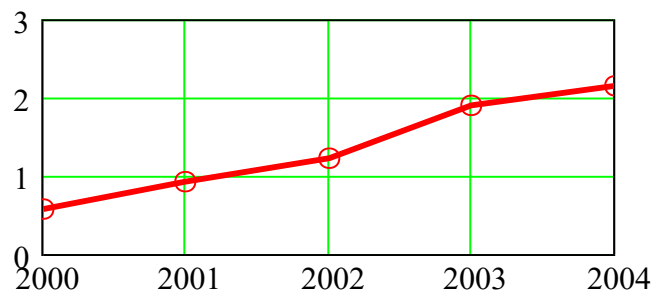


Рис. 4.27. Динамика изменения относительной ошибки прогнозирования для техноценоза (см. п. 4.3):  
абсцисса – исследуемые годы;  
ордината – проценты

Численные значения относительных ошибок прогнозирования электропотребления для примера из параграфа 4.3 приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

#### ЗНАЧЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ОШИБОК ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Год	Суммарная относительная ошибка	Средняя относительная ошибка, %	Относительная ошибка, %
+1	5,114	7,4	0,6
+2	6,844	9,9	0,9
+3	8,498	12,3	1,2
+4	10,679	15,5	1,9
+5	11,387	16,5	2,1

Главным показателем, характеризующим точность прогноза, является относительная ошибка прогнозирования для всего техноценоза. Ее значение растет с увеличением глубины, принимая свое максимальное значение на последнем году исследования – 2,1 % (табл. 4.2). Такая точность перспективного прогноза электропотребления превосходит все известные методы и соответствует существующим высоким требованиям [19,20].

В рамках второй процедуры оценки адекватности работы модели производится анализ остатков, который включает проверку выполнения ряда условий [23,52]: остатки должны быть независимыми, иметь нулевые средние, одинаковую (постоянную) дисперсию, и их распределение должно подчиняться нормальному закону.

В первую очередь в процессе анализа вычисляются стандартизированные остатки прогнозирования [65]:

$$se = \frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}_B}{\sigma_\varepsilon}, \quad (4.56)$$

где  $\varepsilon$  – абсолютная ошибка прогнозирования;  
 $\bar{\varepsilon}_B$  – выборочное среднее абсолютной ошибки прогнозирования;  
 $\sigma_\varepsilon$  – выборочное среднее квадратическое отклонение абсолютной ошибки прогнозирования.

В первую очередь стандартизированные остатки прогнозирования проверяются на наличие выбросов (рис. 4.28).

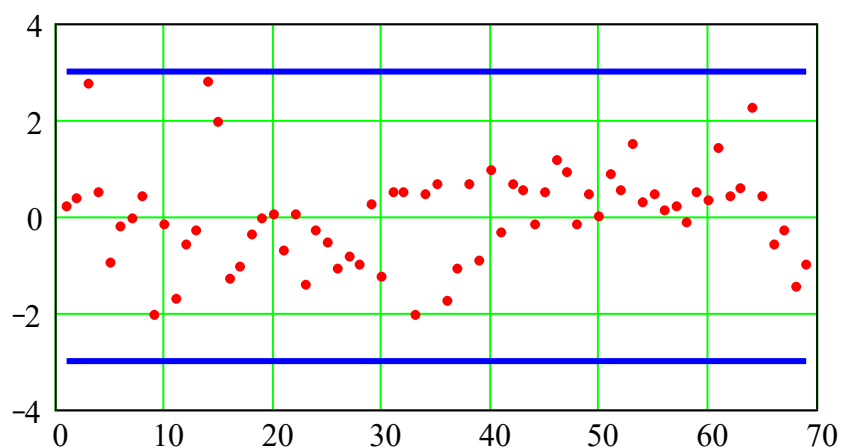


Рис. 4.28. Проверка остатков на наличие выбросов:  
 абсцисса – номера объектов;  
 ордината – значения стандартизированных остатков;  
 точки – стандартизированные остатки;  
 сплошные линии – доверительный интервал

Выбросом называется остаток, который по абсолютной величине превосходит остальные и отличается от среднего по остаткам более чем на три стандартных отклонения. Из рисунка 4.28 видно, что для исследуемого техноценоза (см. п. 4.3) все стандартизированные остатки лежат в пределах доверительного интервала, что указывает на отсутствие существенных аномалий в рассматриваемом процессе прогнозирования.

При корректном моделировании остатки являются результатом случайного рассеяния, в котором не прослеживается доминирующее действие какого-либо алгоритмически неконтролируемого и неуправляемого процесса [23,52]. Если данное условие выполняется, то согласно центральной предельной теореме, при увеличении числа опытов, распределение остатков будет подчиняться закону Гаусса. Проверка остатков на соответствие нормальному закону распределения осуществлялась по критерию Пирсона, наблюдаемое значение которого вычисляется по формуле [23]:

$$\chi_{\text{H}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (h_i - h'_i)^2}{h'_i}, \quad (4.57)$$

где  $m$  – количество интервалов;  
 $h$  – эмпирические частоты;  
 $h'$  – теоретические частоты.

Наблюдаемые значения критерия для примера из параграфа 4.3 показаны в таблице 4.3. По табулированному распределению  $\chi^2$ , при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и числе степеней свободы  $k = m - 3$ , найдена критическая точка правосторонней критической области:  $\chi_{\text{КР}}^2 = 11,1$ . Если  $\chi_{\text{H}}^2 < \chi_{\text{КР}}^2$ , то гипотеза о нормальном законе распределения остатков принимается, в противном случае – отвергается.

Таблица 4.3

### ВЫЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $\chi_{\text{H}}^2$ НА ПРОГНОЗИРУЕМЫЕ ГОДЫ

Годы прогноза	+1	+2	+3	+4	+5
Значения $\chi_{\text{H}}^2$	10,681	7,805	6,393	9,347	10,819

Исходя из полученных результатов, приведенных в таблице 4.3, можно сделать вывод о том, что теоретические и эмпирические частоты

здесь различаются не значимо (рис. 4.29), следовательно, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

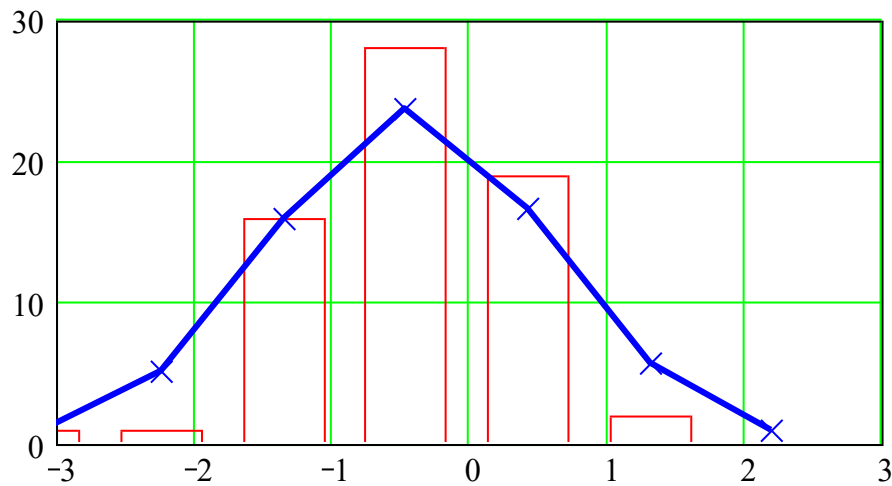


Рис. 4.29. Проверка гипотезы о нормальном законе распределения остатков по критерию Пирсона:  
 абсцисса – границы интервалов;  
 ордината – частоты попадания точек в интервал;  
 гистограмма – эмпирические частоты;  
 кривая линия – теоретические частоты

Так как остатки подчиняются нормальному закону распределения, то далее необходимо оценить однородность их дисперсий с помощью критерия Кохрена [23,52]. Сначала вычисляются исправленные выборочные дисперсии стандартизованных остатков для всех прогнозных лет:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (se_i - \overline{se_B})^2}{n-1}, \quad (4.58)$$

где  $n$  – объем выборки;  
 $se$  – вектор стандартизованных остатков;  
 $\overline{se_B}$  – выборочное среднее стандартизованных остатков.

Наблюдаемое значение критерия Кохрена вычисляется по формуле:

$$G_H = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2}, \quad (4.59)$$

где  $S_{\max}^2$  – максимальная исправленная выборочная дисперсия стандартизованных остатков;

$S_1^2 \dots S_5^2$  – исправленные выборочные дисперсии стандартизированных остатков на прогнозные годы.

Расчеты для исследуемого техноценоза (см. п. 4.3) дали  $G_H = 0,2$ . По таблице для критических точек распределения Кохрена, при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , числе степеней свободы  $k = n - 1$  и количестве расчетных выборок, равном пяти, с помощью интерполяции для заданных значений параметров найдена критическая точка правосторонней критической области:  $G_{KP} = 0,2754$ . Так как  $G_H < G_{KP}$ , то гипотеза об однородности дисперсий стандартизированных остатков принимается. Это является доказательством того, что максимальное значение изменчивости здесь не является инородным, а представляет собой результат случайного рассеяния исследуемой функции отклика.

Известно, что если разработанная модель адекватна, то остатки результатов моделирования должны являться независимыми случайными величинами с распределением  $N(0, \sigma^2)$ , т.е. все сериальные корреляции  $\rho_s = 0$ . В противном случае, наличие сериальной корреляции остатков ставит под сомнение подобранную модель и делает целесообразным повторный анализ данных. Для выявления сериальной корреляции остатков применяется критерий Дарбина – Уотсона [23,52].

Прежде всего, по вектору стандартизированных остатков прогнозирования оценивается значение d-статистики:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (se_i - se_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n se_i^2}, \quad (4.60)$$

где  $se$  – вектор стандартизированных остатков прогнозирования;  
 $n$  – число наблюдений.

В таблице 4.4 представлены численные значения d-статистики для пяти лет прогнозирования (пример – см. п. 4.3).

Таблица 4.4

#### ЗНАЧЕНИЯ D-СТАТИСТИКИ НА ИССЛЕДУЕМЫЕ ГОДЫ

Годы прогноза	+1	+2	+3	+4	+5
d-статистика	1,866	2,011	1,789	1,985	2,154

Рассматриваемая d-статистика оценивается с помощью двустороннего критерия Дарбина – Уотсона с равными хвостами  $(d_L, d_U)$  [52]. Если



$d < d_L$ , то  $d$ -статистика значима и гипотеза  $\rho_s = 0$  отвергается на уровне вероятности  $2\alpha$ . При  $d > d_U$ ,  $d$ -статистика незначима и гипотеза  $\rho_s = 0$  принимается на уровне  $2\alpha$ . В противном случае, когда  $d_L \leq d \leq d_U$ , критерий не позволяет сделать какие-либо выводы. По таблице критических точек критерия Дарбина – Уотсона, при уровне вероятности  $\alpha = 0,05$ , числе наблюдений  $n = 69$  и количестве предикторов  $k = 5$ , найдены обе критические точки:  $d_L = 1,46$  и  $d_U = 1,77$ . При сравнении вычисленных значений  $d$ -статистики (табл. 4.4) с критическими точками можно заключить, что  $d$ -статистика незначима, что позволяет принять гипотезу об отсутствии сериальной корреляции остатков в модели [19,20].

Еще одним критерием проверки модели на адекватность является тест остатков моделирования на белый шум, который проводится с помощью критерия Бартлетта [23,52]. Спектр мощности белого шума  $p(f)$  имеет в частотном диапазоне  $0 - 0,5$  Гц постоянное значение  $2\sigma_{se}^2$ . Следовательно, график кумулятивного (накопленного) спектра белого шума, как интегральной функции частоты

$$P(f) = \frac{1}{2\sigma_{se}^2} \cdot \int_0^f p(g)dg, \quad (4.61)$$

имеет вид прямой линии, идущей от точки  $(0;0)$  к точке  $(0,5;1,0)$ . При этом выборочное значение спектра белого шума вычисляется с помощью быстрого преобразования Фурье.

Вероятностное соотношение между теоретическим и выборочным кумулятивным спектром такое же, как между теоретической и эмпирической функциями распределения. Следовательно, можно построить доверительные границы для теоретического кумулятивного спектра с помощью критерия Колмогорова [65], в соответствии с которым вычисляется теоретически нормированный накопленный спектр белого шума:

$$T_k = 2 \cdot f_k; f_k = \frac{k}{n}; k = 1 \dots n, \quad (4.62)$$

где  $T_k$  – нормированный накопленный спектр белого шума;  
 $f_k$  – частота спектра;  
 $n$  – объем выборки.

Верхние и нижние доверительные границы теоретического кумулятивного спектра рассчитываются по формулам (рис. 4.30):

$$T1_k = T_k + 1,36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-2}}; T2_k = T_k - 1,36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-2}}, \quad (4.63)$$

где  $T1_k$  и  $T2_k$  – верхняя и нижняя доверительные граница спектра.

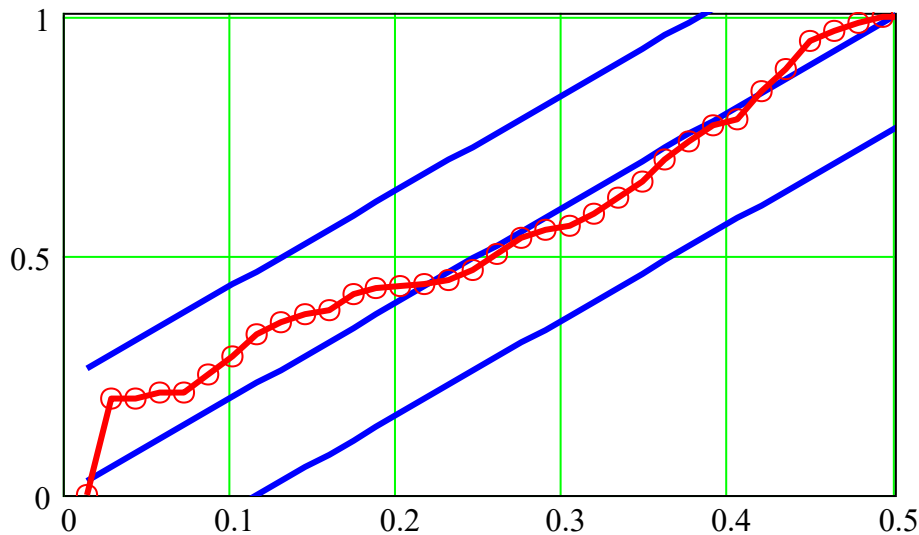


Рис. 4.30. Кумулятивный спектр стандартизованных остатков [19,20]: абсцисса – частота спектра, 1/год; ордината – накопленный спектр в относительных единицах; верхняя и нижняя сплошные линии – доверительные границы кумулятивного спектра остатков; средняя сплошная линия – теоретический нормированный кумулятивный спектр стандартизованных остатков; кривая с кругами – кумулятивный спектр остатков

Анализ рисунка 4.30 показывает, что накопленный спектр стандартизованных остатков, вычисленный для примера из параграфа 4.3, лежит внутри доверительных границ, т.е. спектр остатков представляет собой белый шум, что, в свою очередь, подтверждает адекватность модели.

На завершающем этапе проверки адекватности модели проверяется критерий Фишера, в соответствии с которым вычисляется выборочная дисперсия регрессионной модели [23,52]:

$$\sigma_{PE}^2 = \frac{1}{n-p} \cdot \sum_{i=1}^n (X_{Pi} - \bar{X}_P)^2, \quad (4.64)$$

где  $p$  – число коэффициентов, входящих в модель;  
 $X_P$  и  $\bar{X}_P$  – вектор прогнозных оценок и его среднее.

В качестве критерия значимости здесь используется F-параметр, который равен отношению двух выборочных дисперсий (результаты оценки для примера, рассмотренного в п. 4.3, приведены в табл. 4.5):

$$F = \frac{\sigma_{PE}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2}, \quad (4.65)$$

где  $F$  – F-параметр регрессионной модели;  
 $\sigma_{PE}^2$  – выборочная дисперсия регрессионной модели;  
 $\sigma_{\varepsilon}^2$  – выборочная дисперсия абсолютной ошибки прогнозирования в рамках модели.

Таблица 4.5

ЗНАЧЕНИЯ F-ПАРАМЕТРА НА ИССЛЕДУЕМЫЕ ГОДЫ

Годы прогноза	+1	+2	+3	+4	+5
F-параметр	9006	3551	3071	7878	1594

По таблице критических значений критерия Фишера [52], при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , числе степеней свободы  $m_1 = n - 5$  и  $m_2 = 1$  определено критическое значение критерия:  $F_{KP} = 253$ . Так как  $F > F_{KP}$ , то дисперсия, обусловленная регрессией, значимо больше дисперсии остатков для всех прогнозных лет, следовательно, модель, рассматриваемая в параграфе 4.3, может быть признана адекватной.

Таким образом, оценка адекватности работы динамической адаптивной модели управления процессом электропотребления объектов исследуемого техноценоза (п. 4.3) показала следующее. Относительная ошибка прогнозирования для всей инфраструктуры, несколько возрастающая с увеличением глубины прогноза, на последнем (пятом) году не превышает 2,1 %. Следует отметить, что погрешность прогноза статической модели, описанной в работах [19,20], уже на первом году прогнозирования достигает 2 %, а на последующих годах она резко возрастает. Анализ остатков динамической модели показал, что все предъявляемые к ним требования выполняются: у стандартизированных остатков отсутствуют ярко выраженные выбросы, и они распределены по нормальному закону с однородной дисперсией; отсутствуют сериальные корреляции остатков, которые являются белым шумом, а дисперсия, обусловленная регрессией, значимо больше дисперсии остатков. Это является подтверждением адекватности разработанной модели, которая может применяться для моделирования электропотребления объектов техноценоза на глубину до 5 – 7 лет.