

#### 4.4. Оценка адекватности моделирования

Оценка адекватности динамической адаптивной модели электропотребления техноценоза включает две основные процедуры. Первая заключается в оценке ошибок (погрешностей) моделирования, т.е. собственно проверке качества процесса моделирования. Вторая процедура предполагает анализ остатков моделирования на наличие полезной информации и неучтенных моделью закономерностей [43,44,83,86,106,108].

Замысел оценки адекватности заключается в следующем. Из имеющихся данных по электропотреблению объектов техноценоза последние пять лет резервируются в качестве матрицы верификации, а по оставшимся данным осуществляется перспективное моделирование на глубину матрицы верификации. Затем полученные модельные значения электропотребления сравниваются с соответствующими эмпирическими данными с использованием двух процедур оценки адекватности. Отрицательный вывод по первой процедуре свидетельствует либо о существенных недостатках в методологии, применяемой в модели, либо о неправильной оценке ее прогностических возможностей. Вторая процедура служит важным индикатором полноты и корректности алгоритма модели [83,86,106,108].

Абсолютная ошибка моделирования вычисляется по формуле:

$$\varepsilon = X - X_p, \quad (4.47)$$

где  $\varepsilon$  – вектор ошибок моделирования;  
 $X$  и  $X_p$  – вектора эмпирических данных и модельных оценок.

Определение погрешностей моделирования осуществляется для всех исследуемых лет матрицы верификации, причем в качестве эмпирических значений электропотребления объектов техноценоза для расчетов берутся истинные значения, соответствующие году моделирования.

Суммарная абсолютная ошибка для  $n$ -объектов техноценоза:

$$\varepsilon_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|. \quad (4.48)$$

Абсолютная ошибка для техноценоза в целом по модулю:

$$E = \left| \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n X_{Pi} \right|. \quad (4.49)$$

Численные значения абсолютных ошибок моделирования для примера из параграфа 4.3 [83] приведены в таблице 4.1 и на рисунке 4.24.

Таблица 4.1  
ЗНАЧЕНИЯ АБСОЛЮТНЫХ ОШИБОК МОДЕЛИРОВАНИЯ

Год	Максимальная абсолютная ошибка, кВт·ч	Суммарная абсолютная ошибка, кВт·ч	Абсолютная ошибка для техноценоза, кВт·ч
+1	$1,863 \cdot 10^4$	$3,294 \cdot 10^5$	$1,017 \cdot 10^5$
+2	$4,687 \cdot 10^4$	$4,421 \cdot 10^5$	$1,589 \cdot 10^5$
+3	$4,226 \cdot 10^4$	$5,316 \cdot 10^5$	$2,16 \cdot 10^5$
+4	$1,865 \cdot 10^4$	$5,094 \cdot 10^5$	$3,44 \cdot 10^5$
+5	$8,545 \cdot 10^4$	$7,438 \cdot 10^5$	$3,851 \cdot 10^5$

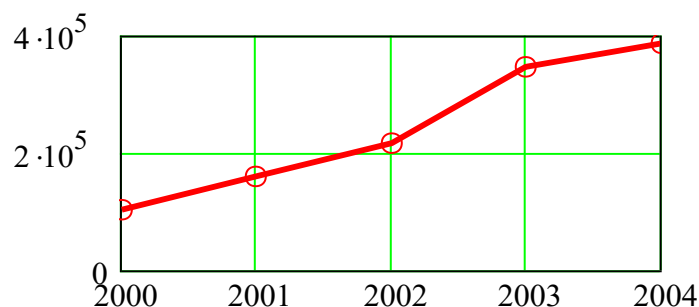


Рис. 4.24. Динамика изменения абсолютной ошибки моделирования для техноценоза [83]: абсцисса – исследуемые годы; ордината – электропотребление, кВт·ч

Мерой рассеяния модельных значений служит коэффициент вариации [189,334]. Для его расчета сначала определяется выборочное среднее квадратическое отклонение абсолютной ошибки моделирования:

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}_B)^2}{n}}, \quad (4.50)$$

где  $n$  – объем выборки;

$\bar{\varepsilon}_B$  – выборочное среднее абсолютной ошибки моделирования.

Коэффициент вариации определяется по следующей формуле:

$$K = \frac{\sigma_{\varepsilon}}{\bar{X}_B}, \quad (4.51)$$

где  $\sigma_{\varepsilon}$  – выборочное среднее квадратическое отклонение абсолютной ошибки моделирования;  
 $\bar{X}_B$  – выборочное среднее реальных данных.

Численные значения коэффициента вариации, рассчитанные на годы для примера из параграфа 4.3 [86], находятся в пределах 2 – 6 %.

Относительная ошибка моделирования для объектов техноценоза:

$$\varepsilon_{\text{ОТН}} = \varepsilon \cdot X^{-1}. \quad (4.52)$$

Суммарная относительная ошибка моделирования (рис. 4.25):

$$\varepsilon_{\Sigma\text{ОТН}} = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_{\text{ОТН}_i}|. \quad (4.53)$$

Средняя относительная ошибка моделирования (рис. 4.26):

$$\varepsilon_{\text{СР\_ОТН}} = \frac{\varepsilon_{\Sigma\text{ОТН}}}{n} \cdot 100 \%. \quad (4.54)$$

Относительная ошибка для техноценоза в целом (рис. 4.27):

$$\text{ОЕ} = \frac{E}{\sum_{i=1}^n X_i} \cdot 100 \%. \quad (4.55)$$

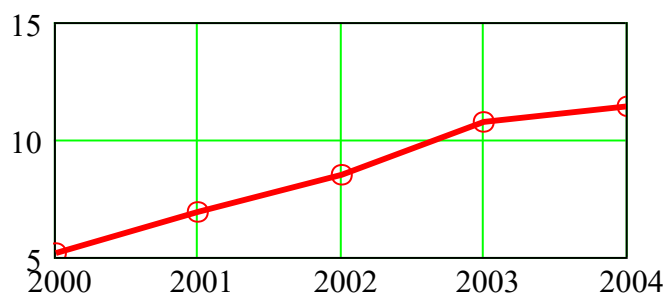


Рис. 4.25. Динамика изменения суммарной относительной ошибки моделирования (см. п. 4.3):  
 абсцисса – исследуемые годы;  
 ордината – относительные единицы

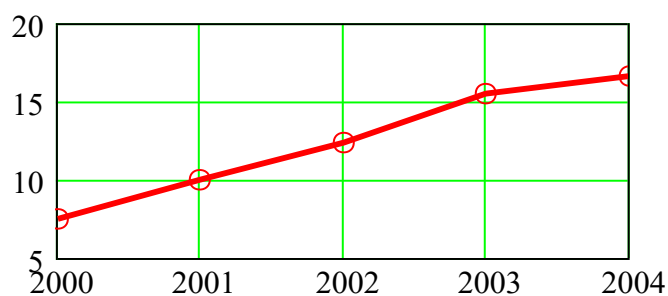


Рис. 4.26. Динамика изменения средней относительной ошибки моделирования (см. п. 4.3): абсцисса – исследуемые годы; ордината – проценты



Рис. 4.27. Динамика изменения относительной ошибки моделирования для техноценоза (см. п. 4.3): абсцисса – исследуемые годы; ордината – проценты

Численные значения относительных ошибок моделирования электропотребления для примера из параграфа 4.3 приведены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

#### ЗНАЧЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ОШИБОК МОДЕЛИРОВАНИЯ

Год	Суммарная относительная ошибка	Средняя относительная ошибка, %	Относительная ошибка, %
+1	5,114	7,4	0,6
+2	6,844	9,9	0,9
+3	8,498	12,3	1,2
+4	10,679	15,5	1,9
+5	11,387	16,5	2,1

Главным показателем, характеризующим точность модели, является относительная ошибка моделирования для всего техноценоза. Ее значение растет с увеличением глубины, принимая свое максимальное значение на последнем году исследования – 2,1 % (табл. 4.2). Такая точность перспективного моделирования электропотребления превосходит все известные методы и соответствует существующим высоким требованиям [83,86,108].

В рамках второй процедуры оценки адекватности работы модели производится анализ остатков, который включает проверку выполнения ряда условий: остатки должны быть независимыми, иметь нулевые средние, одинаковую (постоянную) дисперсию, и их распределение должно подчиняться нормальному закону. В первую очередь в процессе анализа вычисляются стандартизированные остатки моделирования [397]:

$$se = \frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}_B}{\sigma_\varepsilon}, \quad (4.56)$$

где  $\varepsilon$  – абсолютная ошибка моделирования;  
 $\bar{\varepsilon}_B$  – выборочное среднее абсолютной ошибки моделирования;  
 $\sigma_\varepsilon$  – выборочное среднее квадратическое отклонение абсолютной ошибки моделирования.

Дальнейшая оценка погрешности предполагает проверку стандартизированных остатков моделирования на наличие выбросов (рис. 4.28).

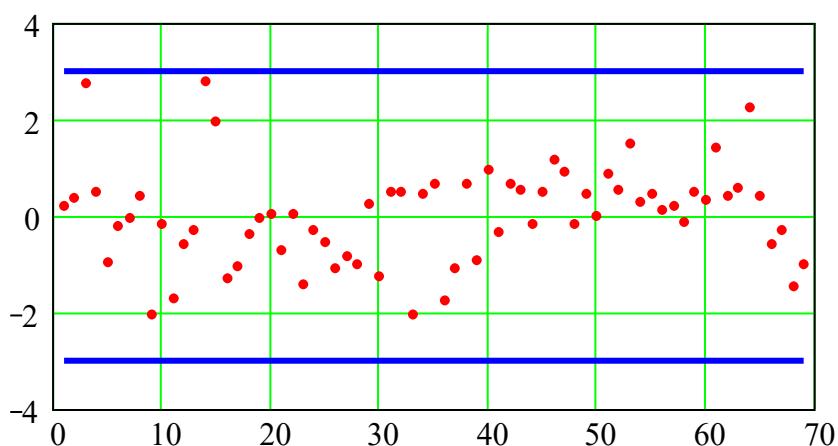


Рис. 4.28. Проверка остатков на наличие выбросов:  
 абсцисса – номера объектов;  
 ордината – значения стандартизированных остатков;  
 точки – стандартизированные остатки;  
 сплошные линии – доверительный интервал

Выбросом называется остаток, который по абсолютной величине превосходит остальные и отличается от среднего по остаткам более чем на три стандартных отклонения. Из рисунка 4.28 видно, что для исследуемого техноценоза (см. п. 4.3) все стандартизированные остатки лежат в пределах доверительного интервала, что указывает на отсутствие существенных аномалий в рассматриваемом процессе моделирования.

При корректном моделировании остатки являются результатом случайного рассеяния, в котором не прослеживается доминирующее действие какого-либо алгоритмически неконтролируемого и неуправляемого процесса [189,334]. Если условие выполняется, то согласно центральной предельной теореме, при увеличении числа опытов, распределение остатков будет подчиняться закону Гаусса. Проверка остатков на соответствие нормальному закону распределения осуществлялась по критерию Пирсона, наблюдаемое значение которого вычисляется по формуле [189]:

$$\chi_{\text{H}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (h_i - h'_i)^2}{h'_i}, \quad (4.57)$$

где  $m$  – количество интервалов;  
 $h$  и  $h'$  – эмпирические и теоретические частоты.

Наблюдаемые значения критерия для примера из параграфа 4.3 показаны в таблице 4.3. По табулированному распределению  $\chi^2$ , при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  и числе степеней свободы  $k = m - 3$ , найдена критическая точка правосторонней критической области:  $\chi_{\text{КР}}^2 = 11,1$ . Если  $\chi_{\text{H}}^2 < \chi_{\text{КР}}^2$ , то гипотеза о нормальном законе распределения остатков принимается, в противном случае – отвергается [86,108,189,334].

Таблица 4.3

#### ВЫЧИСЛЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ $\chi_{\text{H}}^2$ НА МОДЕЛЬНЫЕ ГОДЫ

Годы модели	+1	+2	+3	+4	+5
Значения $\chi_{\text{H}}^2$	10,681	7,805	6,393	9,347	10,819

Исходя из полученных результатов, приведенных в таблице 4.3, можно сделать вывод о том, что теоретические и эмпирические частоты

здесь различаются не значимо (рис. 4.29), следовательно, гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

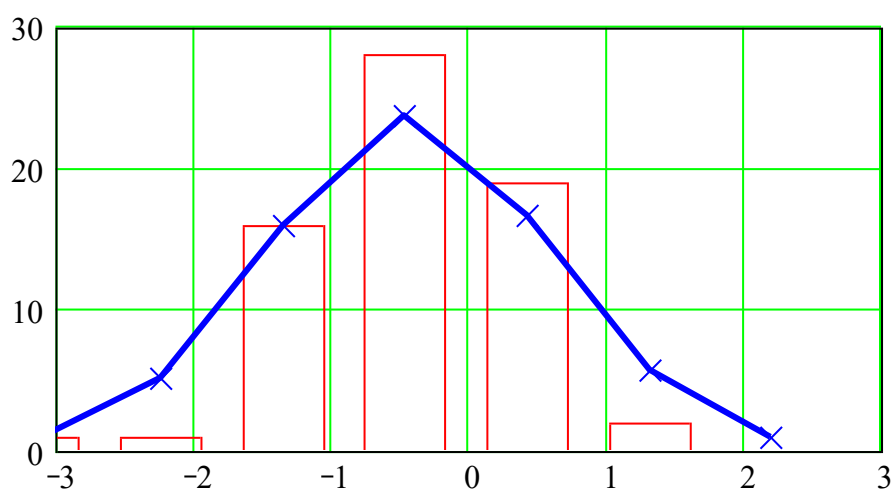


Рис. 4.29. Проверка гипотезы о нормальном законе распределения остатков по критерию Пирсона:  
 абсцисса – границы интервалов;  
 ордината – частоты попадания точек в интервал;  
 гистограмма – эмпирические частоты;  
 ломаная линия – теоретические частоты

Так как остатки подчиняются нормальному закону распределения, то далее необходимо оценить однородность их дисперсий с помощью критерия Кохрена [189,334]. Сначала вычисляются исправленные выборочные дисперсии стандартизованных остатков для всех модельных лет:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (se_i - \overline{se_B})^2}{n-1}, \quad (4.58)$$

где  $\overline{se}$  – вектор стандартизованных остатков;  
 $\overline{se_B}$  – выборочное среднее стандартизованных остатков.

Наблюдаемое значение критерия Кохрена вычисляется по формуле:

$$G_H = S_{\max}^2 / (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2), \quad (4.59)$$

где  $S_{\max}^2$  – максимальная исправленная выборочная дисперсия стандартизованных остатков;

$S_1^2, \dots, S_5^2$  – исправленные выборочные дисперсии стандартизированных остатков на модельные годы.

Расчеты для исследуемого техноценоза (см. п. 4.3) дали  $G_H = 0,2$ . По таблице для критических точек распределения Кохрена, при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , числе степеней свободы  $k = n - 1$  и количестве расчетных выборок, равном пяти, с помощью интерполяции для заданных значений параметров найдена критическая точка правосторонней критической области:  $G_{KP} = 0,2754$ . Так как  $G_H < G_{KP}$ , то гипотеза об однородности дисперсий стандартизированных остатков принимается. Это является доказательством того, что максимальное значение изменчивости здесь не является инородным, а представляет собой результат случайного рассеяния исследуемой функции отклика [83,86,108,189,334].

Известно, что если разработанная модель адекватна, то остатки результатов моделирования должны являться независимыми случайными величинами с распределением  $N(0, \sigma^2)$ , т.е. все сериальные корреляции  $\rho_s = 0$ . В противном случае, наличие сериальной корреляции остатков ставит под сомнение подобранную модель и делает целесообразным повторный анализ данных. Для выявления сериальной корреляции остатков применяется критерий Дарбина – Уотсона, предназначенный для тестирования автокорреляции первого порядка [83,86,108,189,334].

В соответствии с критерием, прежде всего, по вектору стандартизированных остатков моделирования оценивается значение d-статистики:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (se_i - se_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n se_i^2}, \quad (4.60)$$

где  $se$  – вектор стандартизированных остатков моделирования;  
 $n$  – число наблюдений.

В таблице 4.4 представлены численные значения d-статистики для пяти лет моделирования (пример – см. п. 4.3 данной книги).

Таблица 4.4

#### ЗНАЧЕНИЯ D-СТАТИСТИКИ НА ИССЛЕДУЕМЫЕ ГОДЫ

Годы модели	+1	+2	+3	+4	+5
d-статистика	1,866	2,011	1,789	1,985	2,154

Рассматриваемая  $d$ -статистика оценивается с помощью двустороннего критерия Дарбина – Уотсона с равными хвостами ( $d_L, d_U$ ) [334]. Если  $d < d_L$ , то  $d$ -статистика значима и гипотеза  $\rho_s = 0$  отвергается на уровне вероятности  $2\alpha$ . При  $d > d_U$ ,  $d$ -статистика незначима и гипотеза  $\rho_s = 0$  принимается на уровне  $2\alpha$ . В противном случае, когда  $d_L \leq d \leq d_U$ , критерий не позволяет сделать какие-либо выводы. По таблице критических точек критерия Дарбина – Уотсона, при уровне вероятности  $\alpha = 0,05$ , числе наблюдений  $n = 69$  и количестве предикторов  $k = 5$ , найдены обе критические точки:  $d_L = 1,46$  и  $d_U = 1,77$ . При сравнении вычисленных значений  $d$ -статистики (табл. 4.4) с критическими точками можно заключить, что  $d$ -статистика незначима, что позволяет принять гипотезу об отсутствии сериальной корреляции остатков в модели [83,86,108].

Еще одним критерием проверки модели на адекватность является тест остатков моделирования на белый шум, который проводится с помощью критерия Бартлетта [189,334]. Спектр мощности белого шума  $p(f)$  имеет в частотном диапазоне  $0 \dots 0,5$  Гц постоянное значение  $2\sigma_{se}^2$ . Следовательно, график кумулятивного (накопленного) спектра белого шума

$$P(f) = \frac{1}{2\sigma_{se}^2} \cdot \int_0^f p(g)dg, \quad (4.61)$$

имеет вид прямой, идущей от точки  $(0;0)$  к  $(0,5;1,0)$ , а выборочное значение спектра белого шума вычисляется быстрым преобразованием Фурье.

Вероятностное соотношение между теоретическим и выборочным кумулятивным спектром такое же, как между теоретической и эмпирической функциями распределения. Следовательно, можно построить доверительные границы для теоретического кумулятивного спектра с помощью критерия Колмогорова [397], в соответствии с которым вычисляется теоретически нормированный накопленный спектр белого шума:

$$T_k = 2 \cdot f_k, f_k = k / n, k = 1 \dots n, \quad (4.62)$$

где  $T_k$  – нормированный накопленный спектр белого шума;

$f_k$  – частота спектра;

$n$  – объем выборки.

Верхние и нижние доверительные границы теоретического кумулятивного спектра рассчитываются по следующим формулам (рис. 4.30):

$$T1_k = T_k + 1,36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-2}}; T2_k = T_k - 1,36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-2}}. \quad (4.63)$$

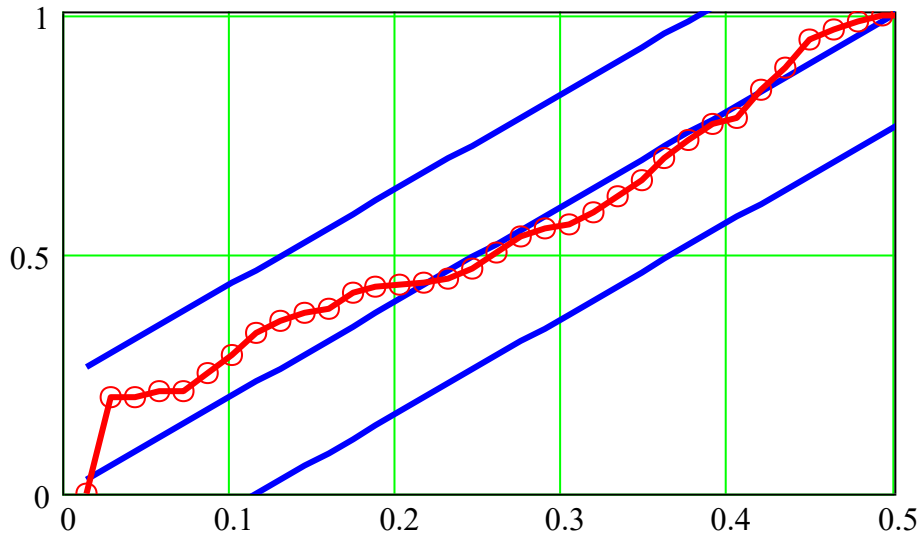


Рис. 4.30. Кумулятивный спектр стандартизованных остатков [86]: абсцисса – частота спектра, 1/год; ордината – накопленный спектр в относительных единицах; верхняя и нижняя сплошные линии – доверительные границы кумулятивного спектра остатков; средняя сплошная линия – теоретический нормированный кумулятивный спектр стандартизованных остатков; кривая с кругами – кумулятивный спектр остатков

Анализ рисунка 4.30 показывает, что накопленный спектр стандартизованных остатков, вычисленный для примера из параграфа 4.3, лежит внутри доверительных границ, т.е. спектр остатков представляет собой белый шум, что, в свою очередь, подтверждает адекватность модели.

На завершающем этапе проверки адекватности модель электропотребления проверяется по критерию Фишера, в соответствии с которым вычисляется выборочная дисперсия регрессионной модели [189,334]:

$$\sigma_{PE}^2 = \frac{1}{n-p} \cdot \sum_{i=1}^n (X_{Pi} - \bar{X}_P)^2, \quad (4.64)$$

где  $p$  – число коэффициентов, входящих в модель;  
 $X_P$  и  $\bar{X}_P$  – вектор модельных оценок и его среднее.

В качестве критерия значимости здесь используется F-параметр, который равен отношению двух выборочных дисперсий (п. 4.3, табл. 4.5):

$$F = \frac{\sigma_{PE}^2}{\sigma_{\varepsilon}^2}, \quad (4.65)$$

где  $F$  – F-параметр регрессионной модели;  
 $\sigma_{PE}^2$  – выборочная дисперсия регрессионной модели;  
 $\sigma_{\varepsilon}^2$  – выборочная дисперсия абсолютной ошибки.

Таблица 4.5

ЗНАЧЕНИЯ F-ПАРАМЕТРА НА ИССЛЕДУЕМЫЕ ГОДЫ

Годы модели	+1	+2	+3	+4	+5
F-параметр	9006	3551	3071	7878	1594

По таблице критических значений критерия Фишера, при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ , числе степеней свободы  $m_1 = n - 5$  и  $m_2 = 1$  определено критическое значение критерия:  $F_{KP} = 253$ . Так как  $F > F_{KP}$ , то дисперсия, обусловленная регрессией, значимо больше дисперсии остатков для всех модельных лет, следовательно, модель, рассматриваемая в параграфе 4.3, может быть признана адекватной [334,83,86,108].

Таким образом, оценка адекватности работы динамической адаптивной модели управления процессом электропотребления объектов исследуемого техноценоза (п. 4.3) показала следующее. Относительная ошибка моделирования для всей инфраструктуры, несколько возрастающая с увеличением глубины, на последнем (пятом) году не превышает 2,1 %. Следует отметить, что погрешность статической модели, описанной в работах [77,81], уже на первом году моделирования достигает 2 %, а на последующих годах она резко возрастает. Анализ остатков динамической модели показал, что все предъявляемые к ним требования выполняются: у стандартизированных остатков отсутствуют ярко выраженные выбросы, и они распределены по нормальному закону с однородной дисперсией; отсутствуют сериальные корреляции остатков, которые являются белым шумом, а дисперсия, обусловленная регрессией, значимо больше дисперсии остатков. Это является подтверждением адекватности разработанной модели, которая может применяться для моделирования. К вопросам моделирования процессов электропотребления мы здесь еще вернемся в следующей главе. Кроме того, недавно издана весьма интересная книга, посвященная вероятностно-автоматному моделированию в ранговом анализе [230].

[\[На следующую страницу\]](#)